数学竞赛解题典型方法例析

广西交通运输学校　韦建恒

【摘要】数学竞赛题的求解不仅要掌握必要的基础知识，还要掌握正确的解题方法和解题技巧。文章总结、介绍了竞赛中的一些典型解法，并通过实例说明这些方法如何灵活运用。

【关键词】数学竞赛　解法　奇偶性　反证法

数学竞赛作为一种数学教育活动，有多方面的重要意义。数学竞赛题的解题过程不仅仅是对基础知识的简单应用，而是解题技巧与思维方式的综合体现，是对数学本质的洞察力、创造力和数学机智的体现。数学竞赛题不同于常规数学题，往往题目新颖，结构复杂，知识覆盖面广，技巧性强，用解常规数学题的方法很难解题成功，它要求解题者不仅要掌握必要的基础知识，还要掌握正确的解题方法。本文总结、介绍了竞赛中的一些典型解法——特殊点（值）法，构造法、奇偶性分析法、反证法、递推法等，并通过实例说明这些方法如何灵活运用。

一、特殊点（值）法

再复杂的数学题都是由简单题复合和演化而来，因此，要学会将数学题化解为与它等价的问题，直到出现一个易于解决的问题为止。特殊值法就是这一思路的体现，在解一些竞赛题中往往起到“点睛”的作用。

例 1　图 1－1 中有大小两个半圆，它们的直径在同一直线上，弦 AB 与小半圆相切，长 12 厘米，并且与直径平行，求阴影部分的面积（$\pi=3.14$）。（2009 年华杯赛）

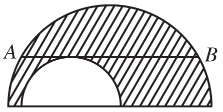


图 1－1

分析：注意到将小圆的直径沿大圆的直径平移，在平移过程中，阴影部分的面积始终不变，故取特殊点——大、小两圆的圆心重合时（如图 1－2）进行计算，本问题就变得简单。

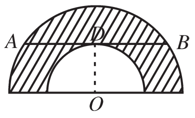


图 1－2

$$S_{阴}=\frac{1}{2}\pi\times OB^2-\frac{1}{2}\pi\times OD^2=\frac{1}{2}\pi\times BD^2=\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{12}{2}\right)^2=18\times3.14=56.52\text{（平方厘米）}$$

例 2　解方程 $x[x]=80$，其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数。（2010 年华杯赛）

分析：由题意

$$x-1<[x]\leqslant x \text{ 且 } x[x]=80$$

可考虑取特殊值 $[x]=\pm9$ 进行验证，问题就相对简单。

当 $[x]=9$ 时，$x=\frac{80}{9}$，此时 $-[x]=\left[\frac{80}{9}\right]=8$，矛盾。

当 $[x]=-9$ 时，$x=-\frac{80}{9}$，此时 $-[x]=\left[-\frac{80}{9}\right]=-9$，满足条件。

故方程的解为：$x=-\frac{80}{9}$

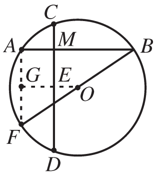
例 3　已知圆 O 的半径为 R，两弦 $AB\perp CD$ 于 M，求证：$AB^2+(CM-DM)^2$ 为定值。

分析与证明：考虑取特殊弦——直径，当弦 AB 为直径时，$CM=DM$，则

$$AB^2+(CM-DM)^2=4R^2$$

尝试证明 $AB^2+(CM-DM)^2=4R^2$。

连接 BO 并延长交圆 O 于 F，连 AF，则 $BF=2R$，$AB\perp AF$。取 CD 的中点 E，连 OE 并延长交 AF 于 G，由 O 为圆心，得 $OE\perp CD$，且 $CE=ED=\frac{1}{2}CD$。又 $CD\perp AB$，所以 $AF/\!/CD$，$OE/\!/AB$。从而得 $OG\perp AF$，因此，四边形 $AMEG$ 为矩形，$AG=EM$。



又因为 O 为 BF 中点，$OG/\!/AB$，所以，$AG=\frac{1}{2}AF$，进而 $ME=\frac{1}{2}AF$，$AF=2MF$，于是

$$\begin{aligned}AB^2+(CM-DM)^2&=AB^2+(CD-2CM)^2=AB^2+4(CE-CM)^2\\&=AB^2+4ME^2=AB^2+AF^2\\&=BF^2=4R^2\text{（定值）}\end{aligned}$$

命题得证。

二、构造法

有些竞赛题直接求解难度较大，需要打破常规，树立“求异”思想，广开思维渠道，从不同的角度去分析探索，而构造法就是这样一种重要而灵活的思维方式，如果运用恰当可以另辟蹊径，难题巧解。

例 1　已知 a，b，c 三数满足方程组 $\begin{cases}a+b=8\\ab-c^2+8\sqrt{2}c=48\end{cases}$，求方程 $bx^2+cx-a=0$ 的根。（2002 年全国初中联赛试题）

分析：由方程组得 $\begin{cases}a+b=8\\ab=c^2-8\sqrt{2}c+48\end{cases}$，以 a，b 为两根构造方程：

$$y^2-8y+(c^2-8\sqrt{2}c+48)=0$$

由 $\Delta_y=(-8)^2-4(c^2-8\sqrt{2}c+48)\geqslant0$ 得：$(c-4\sqrt{2})^2\leqslant0$

$\therefore c=4\sqrt{2}$，此时 $\Delta_y=0$，$a=b=4$.

方程　$bx^2+cx-a=0$ 化为

$4x^2+4\sqrt{2}x-4=0$，

$x_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$.

例 2　若实数 x，y，满足 $\frac{x}{3^3+4^3}+\frac{y}{3^3+6^3}=1$，$\frac{x}{5^3+4^3}+\frac{y}{5^3+6^3}=1$，求 $x+y$。（2005 年初中联赛题）

分析：由于各分式的分母都比较大，直接联立解方程组难度很大，但是采取变更主元的方法，构造出一个新的一元二次方程，过程就简练多了。

将 3^3、5^3 看成方程 $\frac{x}{t+4^3}+\frac{y}{t+6^3}=1$ 的两个根，化简得

$t^2-(x+y-4^3-6^3)t-(6^3x+4^3y-4^3\cdot6^3)=0$

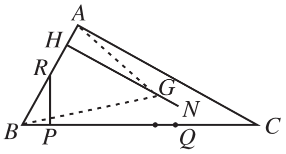
根据韦达定理

$3^3+5^3=x+y-4^3-6^3$

$\therefore x+y=3^3+4^4+5^3+6^3=432.$

例 3　如图，已知 P 为直角三角形 ABC 的斜边 BC 上的

一点，Q 为 PC 的中点，过 P 作 BC 的垂线交 AB 于 R，H 为 AR 的中点，过 H 向 C 所在一侧作射线 $HN\perp AB$。证明：射线 HN 上存在一点 G，使 $AG=CQ$，$BG=BQ$。（2002 全国联赛试题）



分析：如图，$\because BC>AB$，$BR>BP$，

$\therefore AH=\frac{1}{2}(AB-BR)<\frac{1}{2}(BC-BP)=CQ$

故以 A 为圆心，CQ 为半径的圆必交 HN 上一点 G，即有 $AG=CQ$。

连接 BG，$\because \angle RAC=\angle BPR=90^\circ$，以 A、R、P、C 四点可以构造一个圆；$\therefore BR\cdot BA=BP\cdot BC$（割线定理），又 $\because CQ=QP$，$AH=HR$，$\therefore (BH-AH))(BH+AH)=(BQ-CQ)(BQ+CQ)$，即 $BH^2-AH^2=BQ^2-CQ^2$。

由 $CQ^2=AG^2=AH^2+HG^2$ 得 $BH^2=BQ^2-(CQ^2-AH^2)=BQ^2-HG^2$，故 $BQ^2=BH^2+HG^2$，而在直角三角形 BHG 中，$BG^2=BH^2+HG^2$，所以 $BG=BQ$ 得证。

三、奇偶性分析法

这是一种利用整数奇偶性的基本性质，通过对问题本身的奇偶性或奇偶因素的分析而获得解题思路的方法，这种方法常与分类、染色等方法联系。奇偶分析法是解、证数学竞赛问题的常用武器。

奇偶分析法中常用的数字奇偶性质有：

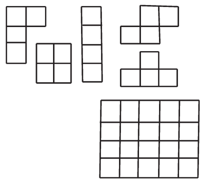
（1）任何奇数不等于偶数；

（2）任意多个奇数之积为奇数；整数与偶数之积为偶数；奇数个奇数之和为奇数，偶数个奇数之和为偶数；

（3）奇数的平方可表示为 $8m+1$，偶数的平方可表示为 $4m$，其中 m 为整数；

（4）两个数的和与差有相同的奇偶性。

例 1　右图中有 5 个由 4 个 1×1 的小正方格组成的不同形状的硬纸板，问能用这 5 个硬纸板拼成图中 4×5 的长方形吗，如果能，请画出一种拼法；如果不能，请简述理由。（第十五届华怀赛）



分析：不能。将 4×5 的长方形的每一个小方格分别依次涂上黑、白色，则小方格黑、白相联个数相同且为偶数，再将 5 个硬纸板上的每一个小方格涂上黑、白色，无论怎么涂，黑、白色小方格的个数为一奇一偶，故不能成立。

例 2　设 a_1，a_2，…，a_7 是 1，2，…，7 的一个排列，求证：$P=(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_7-7)$ 必为偶数.

证法一：（反证法）若 P 为奇数，则 (a_1-1)，(a_2-2)，…，(a_7-7) 均为奇数，从而 $(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_7-7)$ 也是奇数，但 $(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_7-7)=(a_1,+a_2+\cdots+a_7)-(1+2+\cdots+7)=0$ 为偶数，矛盾，故 P 为偶数。

证法二：在 1，2，…，7，a_1，a_2，…，a_7 这 14 个数中，共有 8 个奇数，而在 $P=(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_7-7)$ 中有 7 个括号，8 个奇数 6 个偶数分为 7 组两两相减，必有一个括号内是两个奇数相减，从而这个括号为偶数，故 P 也是偶数。

例 3　在数轴上给定两点 1 和 $\sqrt{2}$，区间 $(1,\sqrt{2})$ 内任取 n 个点，在此 $n+2$ 个点中，每相邻两点连成一线段，可得 $n+1$ 条线段。证明：在此 $n+1$ 条线段中，以一个有理点和一个无理点为端点的线段恰有奇数条。

分析：将 $n+2$ 个点按从小到大的顺序记为：

A_1，A_2，……，A_{n+1} 并在每一点赋予数值 a_i，

使 $a_i\begin{cases}1，当 A_i 为有理数点时，\\ -1，当 A_i 为无理数点时.\end{cases}$

同时，每条线段 A_iA_{i+1} 也可数字化为 a_ia_{i+1}，

$$a_ia_{i+1}=\begin{cases}-1,当 A_i,A_{i+1} 一为有理数点,一为无理数点时\\ 1,当 A_i,A_{i+1} 同为有理数点或无理数点时\end{cases}$$

设 $a_i\cdot a_{i+1}=-1$ 的线段有 k 条，则

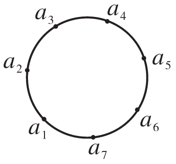
$$\begin{aligned}(-1)^k&=(-1)\cdot(+1)^{n-k+1}\\&=(a_1a_2)(a_2a_3)(a_3a_4)\cdots(a_{n+1}a_{n+2})\\&=a_1(a_2a_3\cdots a_{n+1})^2a_{n+2}\\&=a_1a_{n+2}=-1\end{aligned}$$

$\therefore k$ 为奇数。

四、反证法

当一个命题不可能直接证明或不容易证明时，就要间接证明。间接证明的重要方法之一就是反证法。采用反证法，从一个比较直接、明确的结论出发进行推理论证，从而达到解决问题的目的，这也是数学竞赛中常用的解题方法。

例 1　能否找到 7 个整数，使得这 7 个整数沿圆周排成一圈后，任 3 个相邻数的和都等于 29？如果能，请举一例；如果不能，请简述理由。（第 15 届华杯赛）



分析：假设能找到满足条件的 7 个数 a_1，a_2，…，a_7，由已知，有 $(a_1+a_2+a_3)+(a_2+a_3+a_4)+(a_3+a_4+a_5)+\cdots+(a_7+a_1+a_1)$

$=3(a_1+a_2+\cdots+a_7)=7\times29$

从而，3 能整除 7×29，矛盾。

故不能找到这样的 7 个整数。

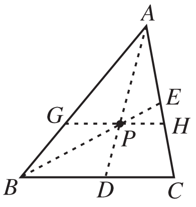
例 2　某班 50 名同学站在操场上进行泼水活动，他们彼此的距离都不相等，每人手中有一把水枪，规则是每人都向自己最近的人打一枪。求证：每个人至多挨 5 枪。

分析：假设有 A 至少挨 6 枪，若 B、C 两个都射向 A，则 $\triangle ABC$ 中，BC 边最长，又因为三角形三边不等，则 $\angle A>60^\circ$。

若有 6 个人射向 A，则从 A 出发的 6 个角都大于 60°，这 6 个角显然不能有重合的，且它们正好应该合成周角，但却大于 360°，矛盾。

所以，每一个人至多挨 5 枪。

例 3　在 $\triangle ABC$ 中是否存在一点 P，使得过 P 点的任意一直线都将该 $\triangle ABC$ 分成等面积的两部分？若存在，请确定点 P 的位置；若不存在，请说明理由。



分析：假设存在点 P 满足条件，连 AP 并延长交 BC 于 D，连 BP 并延长交 AC 于 E，则

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}$

$\therefore BC=CD$，同理可得 $AE=CE$，故 P 为 $\triangle ABC$ 的重心。从而 $\frac{AP}{PD}=\frac{2}{3}$。

过点 P 作 $GH/\!/BC$，分别交 AB、AC 于 G、H，由 $\triangle AGH\backsim\triangle ABC$ 有

$$\frac{S_{\triangle AGH}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AG}{AB}\right)^2=\left(\frac{AP}{AD}\right)^2=\frac{4}{9}\neq\frac{1}{2},$$

即 GH 分 $\triangle ABC$ 为不等的两部分，与假设矛盾。故不存在这样的 P 点。

五、递推方法

在处理一些与自然数有关的复杂的计数问题时，常常难以直接得到结果。这时，通过借助建立类似数列连续项之间的递归关系，即通过研究程序或步骤之间的相依关系，可帮助我们简捷地获得结果，这种解决问题的方法称之为递推方法。其一般步骤为：（1）确定初始值；（2）建立递归关系；（3）解递归关系。其中第二步发现和建立递归关系是递推方法运用的关键。

（下转 88 页）

力。

4. 改革考核方法，建立完整、科学的学生评价体系，使评价方法多元化

考核方法对教师和学生都有很强的导向作用，用单一的笔试方式作为教学的唯一评价方式显然是有失偏颇的，对学生也是不公平的，教学评价应该走向多角度的、全面客观的评价，理论与实验分开考核。一是理论教学考核应加重平时成绩的比重，平时占20%，主要包括作业、课程小论文、课堂提问及参与情况等；期中考试开卷，占30%，重点考查学生分析问题解决问题的能力，并能够使教师有针对性地进行教学；期末考试占50%，督促学生对所学知识进行全面系统的复习。这样更能体现学生对所学内容的灵活掌握情况，同时可以让学生在平时忙起来，期末考试的压力就可以随之减轻。二是实验教学考核应将重心转移到平时学习过程中，重点放在技能考核。平时考核从实验预习、实验态度、实验技能、实验习惯、实验结果和实验报告六个方面按照一定的权重进行打分统计，占总成绩的50%。期末考核占50%，包括卷面理论考核20%、操作技能考核20%及综合实验考核10%，理论考试主要考查学生对实验基本理论知识的掌握程度；实验基本操作技能采用随机抽题并现场操作的方式，学生在给定的时间内完成操作考试，教师当场评分；综合性考核是考查学生综合运用本课程知识来解决实际问题的能力，相当于一个小型的开放性实验，将题目提前发给学生，让他们查阅有关科技实验资料，设计实验原理、操作步骤，提交设计方案，教师审查合格后，学生自己动手，并对实验过程、实验数据进行分析，得出结论，提交实验报告或实验小论文。这种考核方法可以真实地反映学生的实验水平，有利于激励学生重视实验，培养严谨、勤奋的科研素质。

5. 加强自学指导，培养学生的自学能力

二十一世纪，科技飞速发展，给知识更新提出了更高的要求，“掌握探求真理的方法比获得真理更加重要”已成共识。为此，我们在教学过程中加强对学生学习能力的培养。高职化学的教学在教材上涉及面较广，而在课时分配上又不可能像中学一样面面俱到，这样就容易出现“教不胜教”的局面。指导学生自学，不仅是高职化学教学活动的必要手段，而且对高职学生在高等职业教育阶段甚至将来整个的学习过程，都有着积极的作用。因此，教会学生自学的方法，使他们尝试到“发现”的乐趣，体会到自己学习能力上质的飞跃就显得尤为重要。在中学阶段，对于大部分学生而言，其学习主要是依赖于老师的课堂讲授，学生的自学能力普遍较差。所以针对如何培养高职新生的化学自学能力，教师要做到心中有数、从无到有、循序渐进，在适当的时候提出自学要求。通过这种方式，不但可以让老师了解学生自学能力的高低，而且也让学生们明白，自学是高职学习的一种基本方法和能力，从而扫清学生的自学障碍，提高他们的自学信心。另外，教师应适时对学生进行自学指导，根据学生的实际情况和教材特点，灵活选择指导重点，有时应偏重于激发兴趣，创设情景；有时则偏重于学法指导；对于难度较大的章节，还应加强学习线索或难点指导，以减少学生的自学障碍。例如：在讲授原子结构一章内容时，首先给出讨论这部分内容的思路：由氢原子光谱实验现象入手，讨论氢原子核外电子的运动规律，得到原子能级、波函数、几率密度、电子云等基本概念，用来讨论和理解多电子原子中电子运动规律，得到多电子原子能级、核外电子排布，用来揭示元素周期律。有了研究这个问题的思路，学生听课时，就会有主动性，看参考书时，就会有计划、有目的、有具体内容、有程序地进行自学。

对高职化学的教学方法、教学手段、教学模式及考核方法进行改革，可以激发学生的积极性，培养学生自主学习、自主创新等能力，同时也能体现出高职教育的特点，能更好地为后续专业课的开设打下良好的基础，能更好地培养出符合社会发展需要的高技能人才。

【参考文献】

［1］曾仁权，钟国清. 高职高专化学教育改革的研究与实践［J］. 西南民族大学学报（自然科学版），2004，50（5）.

［2］汤晓君. 化工类高职基础化学课教学的改革［J］. 高师理科学刊，2005（4）.

［3］谭锡军. 对高职化学教学改革的思考［J］. 科学教育论坛，2005（18）.

（上接100页）

例1　整数1，2，…，n 的排列满足：每个数或者大于它之前的所有数，或者小于它之后的所有数，试问有多少这样的排列。（1989年加拿大竞赛试题）

分析与解：设满足题设条件的排列个数为 a_n，则 $a_1=1$。当 $n\geqslant 2$ 时，根据数 n 所排的位置对满足题设条件的排列进行分类。若数 n 排在第 i 位，则称为第 i 类（$i=1, 2, \cdots, n$），这样满足条件的排列分为了 n 类。

对第 i 类，由于数 n 排在第 i 位，据题意，第 i 位之后的所有数必须小于第1位至第 i 位的所有数且按递降顺序排列，因此完全确定，只能是 $n-i$，$n-(i+1)$，…，1，而 i 位之前的 $i-1$ 个数有 a_{i-1} 种排法。因此第 i 类的排列个数为 a_{i-1}。

所以所求的排列数为

$$a_n=1+a_1+\cdots+a_{n-1}\quad(n\geqslant 2)$$

由上式，易归纳出：$a_n=2^{n-1}$。

例2　设整数 m，$n\in\{1, 2, 3, \cdots, 1981\}$，且满足

$$(n^2-mn-m^2)^2=1 \tag{1}$$

试确定 m^2+n^2 的最大值。（第22届IMO试题）

解：（1，1）显然满足（1）。设（m，n）为（1）的一组解，即（m，n）为 $n^2-mn-m^2=\pm 1$ 的一组解，其中 m，$n\in\{1, 2, 3, \cdots, 1981\}$。而 $n^2=mn+m^2\pm 1\geqslant m^2$，故 $n\geqslant m$，仅当 $m=n=1$ 时等号成立。

注意到 m，n 较隐蔽的下列数值关系：

$$\begin{aligned}(n^2-mn-m^2)^2&=[(n-m)^2+m(n-m)-m^2]^2\\&=[m^2-m(n-m)-(n-m)^2]^2\end{aligned}$$

因此，如果（m，n）是方程（1）的一组解，那么（$n-m$，m）也是（1）的一组解。依次递推（$m-(n-m)$，$n-m$）也是方程（1）的一组解。把（m，n），（$n-m$，m），（$m-(n-m)$，$n-m$）分别记作（$F(m)$，$G(n)$），（$F(m-1)$，$G(n-1)$），（$F(m-2)$，$G(n-2)$），不难发现递推关系

$$F(m)=F(m-1)+F(m-2)$$

$$G(n)=G(n-1)+G(n-2)$$

又（1，1）满足方程，因此满足方程的 m，n 组成裴波那契数列

1，1，2，3，5，8，13，21，…，987，1597

相邻两数为方程一组解。

因此 m^2+n^2 的最大值为 $987^2+1597^2=3524578$。

以上是数学竞赛中常用的一些基本解题方法。数学竞赛题的求解在一般思维规律的指导下，必须善于灵活运用数学基础知识和基本方法进行探索与尝试，只有熟练掌握基础知识和基本方法，才有可能触类旁通，在竞赛中构想出巧妙的解法并创造出佳绩。

【参考文献】

［1］周春荔. 初中数学竞赛中的思维方法. 北京：中国物资出版社，2004.

［2］胡炳生. 数学解题思路与方法. 安徽：安徽科技出版社，2000.

［3］冷岗松. 高中数学竞赛解题方法研究. 北京：清华大学出版社，1993.

数学竞赛解题典型方法例析

作者：　韦建恒
作者单位：　广西交通运输学校
刊名：　教育界
英文刊名：　JIAOYUJIE
年，卷(期)：　2010(12)

参考文献(3条)

1.周春荔 初中数学竞赛中的思维方法 2004

2.胡炳生 数学解题思路与方法 2000

3.冷岗松 高中数学竞赛解题方法研究 1993

本文读者也读过(10条)

1. 金继红.JIN Ji-hong 数学竞赛促进教与学[期刊论文]-民族教育研究2005,16(5)
2. 钟伟.余海燕 试论课程改革下的竞赛数学[期刊论文]-读与写（教育教学刊）2010,07(5)
3. 谢保利.何万生.彭聪明 首届中国大学生数学竞赛两道题的简单解法[期刊论文]-数学教学研究2010,29(4)
4. 高晓娟.廖敏.尹文 奥林匹克数学竞赛对学生数学思维品质的影响[期刊论文]-内江师范学院学报2010,25(z1)
5. 齐文友 构图巧解数学竞赛题[期刊论文]-数学教学研究2004(6)
6. 孙建峰.辛杰.侯小华 数学竞赛的教育价值及当前竞赛培训工作的改进[期刊论文]-科技信息2008(31)
7. 张宏政.ZHANG Hong-zheng 例析以正方形为背景的数学竞赛题[期刊论文]-中等数学2008(8)
8. 宁靓 若干竞赛数学命题技巧浅谈[期刊论文]-科技信息2008(23)
9. 王亚雄.王新民 一道竞赛题目的几种解法探索及引申[期刊论文]-内江师范学院学报2004,19(4)
10. 史钞.SHI Chao 几道数学竞赛题的简解[期刊论文]-中等数学2005(4)

本文链接：http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_jyj201012059.aspx